MA1 – přednáška 25.11.2019

I. „Co" jsme nestihli v přednášce 20.11. (str. 8–15)

II. Ještě příklad na užití integrace per partes:

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} f' = \sin x & f = -\cos x \\ g = \sin x & f' = \cos x \end{array} \right| =$$
$(x \in R)$

$$= -\sin x \cdot \cos x - \int -\cos^2 x\,dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x\,dx =$$
$$= -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx,$$

a opět, z rovnice pro hledaný integrál dostáváme:

$$\underline{\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + c, \quad x \in R}$$

Tento integrál lze „snadno" najít i užitím vzorce

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$; pak jednodušeji najdeme

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

III. Zbývá „využití" vzorce pro derivování složené funkce pro „výpočet primitivní funkce – a odtud asi „návod" pro integrování složených funkcí – ale to je obecně problém: například v aplikacích důležitý integrál – $\int e^{-x^2}dx$ existuje v R (e^{-x^2} je v R spojitá funkce), ale je dokázáno, že primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí „našich" elementárních funkcí!

Ale : $\underline{\int e^{-x^2}\cdot 2x\,dx = e^{-x^2} + c \;,\; x\in R}$!

(neboť $(e^{-x^2})' = e^{-x^2}\cdot 2x \;,\; x\in R$)

(integrál „vypadá složitější", ale je vlastně „jednoduchý")

Podobně, ani integrály $\int \cos(x^2)dx$, $\int \sin(x^2)dx$ nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, ale integrály

$$\int \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = \sin(x^2) + C \;,\; x\in R$$

$$\int \sin(x^2)\cdot 2x\,dx = -\cos(x^2) + C \;,\; x\in R$$

jsou „jednoduché" !

<u>Umíme „sepsat" pravidlo ?</u>

<u>Pokus</u> : Víme (dle vzorce pro „derivaci složené funkce"):
existuje-li $g'(x)$ v (a,b), $g(x)\in(c,d)$ a $F(y)$ existuje v (c,d),
pak $\quad (F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$ v (a,b)
a tedy $\quad \left(\int (F(g(x)))' dx = F(g(x)) + c \text{ v } (a,b)\right)$ máme

$$\underline{\int F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c \text{ v } (a,b)}\,.$$

Stačí tedy pro výpočtu $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ najít primitivní funkci $F(y)$ k funkci $f(y)$ v (c,d),
pak už

$$(*) \qquad \underline{\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c \;,\; x\in(a,b)}\,.$$

A často se výpočet integrálu (*) zapisuje takto:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} g(x)=y \\ g'(x)dx = dy \end{array}\right| = \int f(y)\,dy = F(y)+C =$$

$$= F(g(x)) + C, \quad x\in(a,b)$$

A tedy můžeme formulovat větu:

Věta (1. věta o substituci)

Nechť 1) funkce $f(y)$ je spojitá v intervalu (c,d),

2) $g'(x)$ je spojitá v intervalu (a,b)

3) $g(a,b) \subset (c,d)$.

Pak existuje v intervalu (a,b) primitivní funkce k funkci $f(g(x))\cdot g'(x)$ a je

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C,$$

kde F je primitivní funkce k funkci f v intervalu (c,d).

Důkaz (vlastně už jsme „naznačili" před formulací věty)

1) f je spojitá v (c,d) $\Rightarrow$ k f existuje v (c,d) funkce primitivní F,

2) $g'(x)$ je spojitá v (a,b) $\Rightarrow$ $g(x)$ je spojitá v (a,b)

3) $f(g(x))\cdot g'(x)$ je spojitá v (a,b), má tedy v (a,b) primitivní funkci a

4) $$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) \underset{(1)}{=} f(g(x))\cdot g'(x).$$

Příklady užití 1. věty o substituci:

1) vnější funkce je $f(y) = e^y$:

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x\,dx = \int e^{\sin x} (\sin x)' dx = e^{\sin x} + c, \quad x \in R$$

$$\int e^{x^4} \cdot 4x^3 dx = \int e^{x^4} (x^4)' dx = e^{x^4} + c, \quad x \in R$$

$$\int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' dx = e^{\sqrt{x}} + c, \quad x \in (0, +\infty)$$

ai $$\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\int e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = e^{-\frac{1}{x}} + c, \quad x \in (0, +\infty) \vee x \in (-\infty, 0)$$

2) vnější funkce je $f(y) = \cos y$:

$$\int \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos(\sqrt{x}) (\sqrt{x})' dx = 2 \sin(\sqrt{x}) + c$$

$x \in (0, +\infty)$

nebo „formálně":

$$\int \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = y \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dy \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int \cos y\, dy = 2 \sin y + c = 2 \sin(\sqrt{x}) + c$$

$$\int x^2 \cos(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \cdot \cos(x^3)\,dx = \left| \begin{matrix} x^3 = y \\ 3x^2 dx = dy \end{matrix} \right| =$$
$x \in R$

$$= \frac{1}{3}\int \cos y\,dy = \frac{1}{3}\sin y + C = \frac{1}{3}\sin(x^3) + C$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \int \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int \cos(\ln x)\cdot(\ln x)'\,dx$$
$x \in (0,+\infty)$

$$= \sin(\ln x) + C$$

3) (důležitý typ integrálu) vnější funkce $f(y) = \frac{1}{y}$

obecně: $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\,dx \underset{1VS}{=} \ln|g(x)| + c$

(v intervalech, kde $g(x) \neq 0$)

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(x^2+1) + C, \quad x \in R$$

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{(2+\sin x)'}{(2+\sin x)}\,dx = \ln(2+\sin x) + C, \; x \in R$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx =$$

$= -\ln|\cos x| + c$ v intervalech

$\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in Z$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C, \quad x \in R$$

4) <u>další příklady užití 1. věty o substituci:</u>

někdy je třeba vhodnou substituci „hledat" – je dobré „hledat část" od toho, co by „mohlo být derivací" vnitřní funkce ve funkci, kterou máme integrovat:

$$\underline{\int \frac{1}{1+x^4}\cdot 2x\,dx} = \int \frac{1}{1+x^4}\cdot (x^2)'dx = \int \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot (x^2)'dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}(x^2) + c, \quad x \in R$$

$$\underline{\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx} = \int e^{\operatorname{arctg} x}\cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int e^{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x)'dx$$

$$= e^{\operatorname{arctg} x} + c, \quad x \in R$$

$$\underline{\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\cdot \frac{1}{x^2}\,dx} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)'dx = \left| \begin{array}{l} 1-\frac{1}{x} = t \\ \frac{1}{x^2}\,dx = dt \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{1-\frac{1}{x}} + c, \quad x \in (-\infty, 0),\ x \in (1, +\infty)$$

$$\underline{\int x\sqrt{1-x^2}\,dx} = -\frac{1}{2}\int -2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{t}\right)^3 + c = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + c, \quad x \in (-1, 1)$$

Ale jak najít $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ („chybí" zde $(1-x^2)'$),

nebo $\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx$ (zde zase „chybí" $\frac{1}{2\sqrt{x}} = (2+\sqrt{x})'$)

(aby to byl integrál jednoduchý)

Zde se užije jiné „člení" substituce:

$\int f(x)dx$ – jak? – někdy se podaří substituce „obrácené" provedená – dostaneme-li dobrý nápad substituovat $x=g(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$, nebo když využijeme dobré nápady „matematiků" z dob minulých (t.zv. doporučené substituce), pak (zatím opět „pokus")

$$\int\limits_{x\in(a,b)} f(x)dx = \left|\begin{array}{c} x=g(t) \\ dx=g'(t)dt \\ t\in(\alpha,\beta)\end{array}\right| = \int f(g(t)).g'(t)dt = (\text{umíme-li } v(\alpha,\beta))$$

$= G(t)+c = G(g^{-1}(x))+c$, když k funkci $g(t)$ existuje $v(\alpha,\beta)$ funkce inverzní $g^{-1}(x)$

Je to „dobře"? A kdy lze „pokus" nahoře provést?

Co je třeba předpokládat?

1) f spojitá $v\ (a,b) \Rightarrow \int f(x)dx$ existuje $v(a,b)$

2) $g'(t)$ spojitá $v(\alpha,\beta) \Rightarrow g(t)$ je spojitá $v(\alpha,\beta)$ a $f(g(t)).g(t)$ je spojitá $v(\alpha,\beta)$, tj. má primitivní funkci $v(\alpha,\beta)$, pokud $g(\alpha\beta) = (a,b)$

3) ke $g(t)$ existuje $v(\alpha,\beta)$ inverzní fce.

Věta (2. věta o substituci)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu (a,b), nechť funkce $g(t)$ má spojitou derivaci $g'(t)$ v intervalu (α,β), $g(\alpha,\beta) = (a,b)$ a nechť $g'(t) \neq 0$ v (α,β). Pak, je-li

$$G(t) + c = \int f(g(t)) . g'(t)\,dt \quad , t \in (\alpha,\beta),$$

je $\int f(x)\,dx = G(g^{-1}(x)) \quad , x \in (a,b)$

Formálně lze psát (a často se tak píše):

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \\ t = g^{-1}(x) \\ t \in (\alpha,\beta) \end{array} \right| = \int f(g(t)).g'(t)\,dt = G(t) + c = G(g^{-1}(x)) + c$$

Důkaz:

1) $\int f(x)\,dx$ existuje v (a,b) (f je spojitá v (a,b))

2) $\int f(g(t)).g'(t)\,dt$ existuje v (α,β)

3) $g'(t) \neq 0$ v (α,β), $g'(t)$ je spojitá $\Rightarrow$ $g'(t) > 0$ v (α,β), (resp. $g'(t) < 0$ v (α,β)) tedy g je ryze monotonní v (α,β) a tedy má v (α,β) inverzní funkci ($g^{-1}(x) = t \Leftrightarrow g(t) = x$)

4) Z první věty o substituci víme, že

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = F(g(t)) + c \quad v\ (\alpha,\beta),$$

kde F je primitivní fce k f v (a,b)

a také $\int f(g(t))\, g'(t)\,dt = G(t) + d$ v (α,β) (z předpokladu věty),

tedy „musí" existovat konstanta taková, že

$$F(g(t)) = G(t) + K \quad v\ (\alpha,\beta)$$

$$\text{a} \quad g(t) = x \Leftrightarrow t = g^{-1}(x), \quad x \in (a,b),$$

pak $\underline{F(x) = G(g^{-1}(x)) + K}$, $\underline{x \in (a,b)}$ (což jsme měli ukázat).

<u>Příklady užití 2. věty o substituci</u> (2VS):

1) $\underline{\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx}$, $\underline{x \in (0,+\infty)}$ $=$ $\left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \ (\text{„pokus"}), \quad x \in (0,+\infty) \\ x = t^2 \quad (\equiv g(t)) \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right|$

$$\underset{2VS}{=} \int \frac{1}{2+t} \cdot 2t\,dt = 2 \int \frac{t+2-2}{t+2}\,dt = 2 \int \left(1 - \frac{2}{t+2}\right) dt =$$

$$= 2\left(t - 2\ln|t+2|\right) + c = 2\left(\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+2|\right) + c$$

(ještě lepší substituce: $2+\sqrt{x} = t$, pak $x = (t-2)^2$ a $dx = 2(t-2)\,dt$

a dostaneme:

$$\underline{\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx} = \int \frac{2(t-2)}{t}\,dt = 2\int\left(1-\frac{2}{t}\right)dt =$$

$$= 2\left(t - 2\ln|t|\right)+C = 2\left(2+\sqrt{x} - 2\ln|2+\sqrt{x}|\right)+C$$

(což se liší od prvního výsledku konstantou)

2) <u>trochu „složitější" příklad s „$\sqrt{x}$"</u> (zopakujeme substituci):

$$\underline{\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}+2}\,dx} = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right| = \int \frac{2t}{t^2+2t+2}\,dt =$$

$$\int\left(\frac{2t+2}{t^2+2t+2} + \frac{(-2)}{(t+1)^2+1}\right)dt = \int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,dt - 2\int\frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt$$

$$\underset{(1VS)}{=} \ln\left(t^2+2t+2\right) - 2\,\mathrm{arctg}\,(t+1)+C =$$

$$= \ln\left(x+2\sqrt{x}+2\right) - 2\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{x}+1)+C, \quad x\in(0,+\infty)$$

3) $\underline{\int \sqrt{1-x^2}\,dx}$ („lehký" integrál by byl $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$)
$x\in(-1,1)$

„pokus" – bylo by dobré $\sqrt{1-x^2} = y$, tj. $1-x^2=y^2$
a $x^2+y^2=1$

a to by „šlo": $x=\sin t$, $y=\cos t$; a pro $\underline{t}$
interval takový, aby k $\sin t$ existovala funkce inverzní –

– tedy ukázka:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ dx = \cos t\,dt \\ t = \arcsin x, \quad x \in (-1,1) \end{array} \right| = \left(\begin{array}{l} \sqrt{1-\sin^2 t} = \\ = \cos t, \text{ neboť} \\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \right)$$

$$= \int \cos t \cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(t + \sin t \cdot \cos t) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin t)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}\right) + C =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C}$$

4) $$\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}\,x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x = t \\ x = \mathrm{arctg}\,t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$

$x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

$$= \int \frac{1}{1+t}\,dt = \ln|1+t| + C =$$

$$= \ln|1+\mathrm{tg}\,x| + C$$

ale $\int \frac{1}{1+\mathrm{tg}\,x}\,dx = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt$ – neumíme, bude „příště"

(stejná substituce)

A ještě navíc – při výpočtu integrálu se může kombinovat substituce i s integrací per partes :

Příklady:

1) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\int \operatorname{arctg} x\,dx} \underset{PP}{=} \left| \begin{matrix} f'=1 & f=x \\ g=\operatorname{arctg} x, & g'=\frac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right| =$

$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$

$\underset{1VS}{=} x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

2) a) $\underset{x\in(-1,1)}{\int \arcsin x\,dx} \underset{2VS}{=} \left| \begin{matrix} \arcsin x = t \\ x=\sin t \\ dx = \cos t\,dt \\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \end{matrix} \right| = \int t\cos t\,dt =$

$\underset{PP}{=} \left| \begin{matrix} f'=\cos t & f=\sin t \\ g=t & g'=1 \end{matrix} \right| = t\sin t - \int \sin t\,dt =$

$= t\sin t + \cos t + c = \left(\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t},\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \right)$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

b) lze též nejprve integrovat per partes a pak užít 1VS (zkuste sami).